Πόρισμα (Θεωρήματος Taylor)

$U \subset \mathbb{R}^\nu$ ανοιχτό, $f: U \to \mathbb{R}$ κ-φορές συνεχώς διαφορίσιμη ($\Leftrightarrow f \in C^\kappa(U)$), $\bar{x} \in U \Rightarrow f(\bar{x}+\bar{\eta}) = T_{\kappa,f,\bar{x}}(\bar{x}+\bar{\eta}) + o(\|\bar{\eta}\|^\kappa)$ για $\bar{\eta} \to \bar{0}$ $\left(\Leftrightarrow \lim_{\bar{\eta}\to\bar{0}} \frac{f(\bar{x}+\bar{\eta}) - T_{\kappa,f,\bar{x}}(\bar{x}+\bar{\eta})}{\|\bar{\eta}\|^\kappa} = 0\right)$ όπου

$T_{\kappa,f,\bar{x}}(\bar{x}+\bar{\eta}) = \sum_{\mu=0}^{\kappa} \sum_{|a|=\mu} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \cdot \bar{\eta}^a$ το πολυώνυμο Taylor βαθμού κ της f στο $\bar{x}$

με $D^a f(\bar{x}) = \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_\nu^{a_\nu}}(\bar{x})$ για $a = (a_1, \dots, a_\nu) \in \mathbb{N}_0^\nu$

και $a! = a_1! \cdots a_\nu!$, $\bar{\eta}^a = \eta_1^{a_1} \cdots \eta_\nu^{a_\nu}$

$$\sum_{|a|=0} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{\eta}^a = f(\bar{x})$$

$$\sum_{|a|=1} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{\eta}^a = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \eta_i = \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{\eta}$$

$$\sum_{|a|=2} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{\eta}^a \; *$$

$a = (a_1, \dots, a_\nu) \in \mathbb{N}_0^\nu$ $|a| = a_1 + \dots + a_\nu = 2$

$\Rightarrow a = (0, \dots, 2, \dots, 0) \vee a = (0, \dots, 1, 0, \dots, 1, 0)$

$a = 2e_i = 2(0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-θέση}}}{1}, \dots 0) \vee a = e_i + e_j$ $i \neq j$

$a = e_i + e_j$

$\Longrightarrow a = \bar{e}_i + \bar{e}_j \qquad , i,j \in \{1, \dots, n\}$

$$* = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{D^{\bar{e}_i + \bar{e}_j} f(\bar{x})}{(\bar{e}_i + \bar{e}_j)!} \bar{h}^{\bar{e}_i + \bar{e}_j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{D^{2e_i} f(\bar{x})}{(2\bar{e}_i)!} \bar{h}^{2\bar{e}_i}}_{= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i^2} h_i^2} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \underbrace{\frac{D^{e_i + e_j} f(\bar{x})}{(\bar{e}_i + \bar{e}_j)} \bar{h}^{\bar{e}_i + \bar{e}_j}}_{= \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{|a|=2} \frac{D^{a} f(\bar{x})}{a!} \bar{h}^{a} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} h_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

$$= \frac{1}{2} \bar{h}^{T} H_f(\bar{x}) h$$

όπου
$$H_f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n \partial x_1} \ ② \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \ ① & \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

ο Εσιανός πίνακας της f ο οποίος υπάρχει για f 2-φορές μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ και είναι συμμετρικός αφού ① = ② όταν $f: U \to \mathbb{R}$ 2-φορές συνεχώς (μερικώς) διαφορίσιμη

$$= e^{(x-1)^2} \begin{pmatrix} (4(x-1)^2+2)\cos y & -2(x-1)\sin y \\ -2(x-1)\sin y & -\cos y \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\bar{h}$ = η διαφορά του (x,y) από το σημείο $(1,0)$

$$T_{k,f,(1,0)}(x,y) = f(1,0) + \nabla f(1,0)\cdot(x-1,y) + \frac{1}{2}(x-1,y)\, H_f(1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1,y)\begin{pmatrix} 2(x-1) \\ -y \end{pmatrix} = 1 + \frac{1}{2}\left(2(x-1)^2 - y^2\right) = 1 - (x-1)^2 - \frac{1}{2}y^2$$

<u>Παρατήρηση</u>

Αφού η $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos y$ είναι άπειρες φορές συνεχώς διαφορίσιμη ($\Leftrightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$) (επειδή κάθε φορά που θα παραγωγίζαμε μερικώς ως προς x και y, προκύπτει ένα γινόμενο του $e^{(x-1)^2}$ κάποιου πολυωνύμου του x και του $\cos y$ ή $\sin y$ και όλες αυτές οι συναρτήσεις είναι συνεχείς ως προς (x,y)) έχουμε ότι από το Θ. Taylor ότι

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{e^{(x-1)^2}\cos y - (x-1)^2 + \frac{1}{2}y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} = 0$$

Τοπικά και Ολικά ακρότατα

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ (όχι απαραίτητα ανοικτό) και $f: U \to \mathbb{R}$
Τότε λέμε ότι:

ΟΡΙΣΜΟΣ

(α) Η f έχει (ή παρουσιάζει) στο σημείο $\bar{x} \in U$, τοπικό ελάχιστο αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω. $\forall \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U$ ισχύει $f(\bar{x}) \leq f(\bar{y})$
και γνήσιο τοπικό ελάχιστο αν $\exists\ \varepsilon > 0$ $\forall \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \cap U$ $f(\bar{x}) < f(\bar{y})$ και ολικό ελάχιστο αν $\forall \bar{y} \in U$ $f(\bar{x}) \leq f(\bar{y})$
και γνήσιο ολικό ελάχιστο αν $\forall \bar{y} \in U \setminus \{\bar{x}\}$ $f(\bar{x}) < f(\bar{y})$

(β) Τα αντίστοιχα ισχύουν για μέγιστα.

Παρατήρηση

1) Αν $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές $f: U \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow \exists\ \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in U$ με $\bar{x}_1$ σημείο ολικού ελαχίστου, x_2 σημείο ολικού μεγίστου της f

2) Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν έχουν τοπικά ακρότατα (δηλ. τοπικά μεγ. ή ελάχ.)
π.χ. $f(x) = x$, οι προβολές $f(x_1, \dots x_n) = x_i \in \mathbb{R}$ με $U = \mathbb{R}^n$

3) Το ίδιο ακρότατο μπορεί να παρουσιάζεται σε περισσότερα σημεία του $U \subset \mathbb{R}^n$ (δηλ. είναι σημείο ακροτάτου δεν πρέπει να είναι μοναδικό) π.χ. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f(\bar{x}) = c \in \mathbb{R}$ σταθερά $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Άσκηση

Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα (αν υπάρχουν) των συναρτήσεων

$$f_1(x,y) = x^2+y^2$$

$$f_2(x,y) = -x^2+y^2$$

$$f_3(x,y) = x^2-y^2$$